

数学 I

(1)

固有値 $\lambda = \sqrt{3} \pm 1$

$\lambda_1 = \sqrt{3} + 1$, $\lambda_2 = \sqrt{3} - 1$ とおくと

$\lambda_1 = \sqrt{3} + 1$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_1 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (c_1 は 0 でない任意の定数)

$\lambda_2 = \sqrt{3} - 1$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_2 = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (c_2 は 0 でない任意の定数)

(2)

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} + 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} - 1 \end{bmatrix}$$

または

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} - 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} + 1 \end{bmatrix}$$

(3)

$$\boldsymbol{A}^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\sqrt{3} + 1)^n + (\sqrt{3} - 1)^n & (\sqrt{3} + 1)^n - (\sqrt{3} - 1)^n \\ (\sqrt{3} + 1)^n - (\sqrt{3} - 1)^n & (\sqrt{3} + 1)^n + (\sqrt{3} - 1)^n \end{bmatrix}$$

令和9年度横浜国立大学理工学部編入学試験問題

試験科目：基礎科目

数学：Ⅱ

(1) $\log|y| - \frac{x^2}{2y^2} = C$ (C は任意定数)

(2) $y = \frac{1 + C(x + \sqrt{x^2 + 1})}{1 - C(x + \sqrt{x^2 + 1})}$ (C は任意定数)

正答例

- (1) 運動方程式： $m\ddot{x} + kx = 0$ … 単振動の標準形

- (2) 振動中心： $x = 0$ 、周期： $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

- (3) 物体が右に運動するとき、左向きに動摩擦係数 μmg が働くことを考慮すると：

$$\text{運動方程式： } m\ddot{x} + kx = -\mu mg$$

- (4) 上記の運動方程式を変形すると： $m\ddot{x} + k\left(x + \frac{\mu mg}{k}\right) = 0$

$$y = x + \frac{\mu mg}{k} \text{ とおくと、 } \ddot{y} = \ddot{x} \text{ より、運動方程式は： } m\ddot{y} + ky = 0 \text{ … 単振動の標準形}$$

$$\text{振動中心： } y = 0 \rightarrow x = -\frac{\mu mg}{k} \text{ … 物体が右に動くとき、振動中心が } \frac{\mu mg}{k} \text{ だけ左にずれる}$$

$$\text{周期： } T_n = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ … 摩擦が作用しても周期は不変}$$

- (5) 物体が左に運動するとき、右向きに動摩擦係数 μmg が働くことを考慮すると：

$$\text{運動方程式： } m\ddot{x} + kx = \mu mg$$

- (6) 問(4)と同様に考えれば：

$$\text{振動中心： } x = \frac{\mu mg}{k} \text{ … 物体が左に動くとき、振動中心が } \frac{\mu mg}{k} \text{ だけ右にずれる}$$

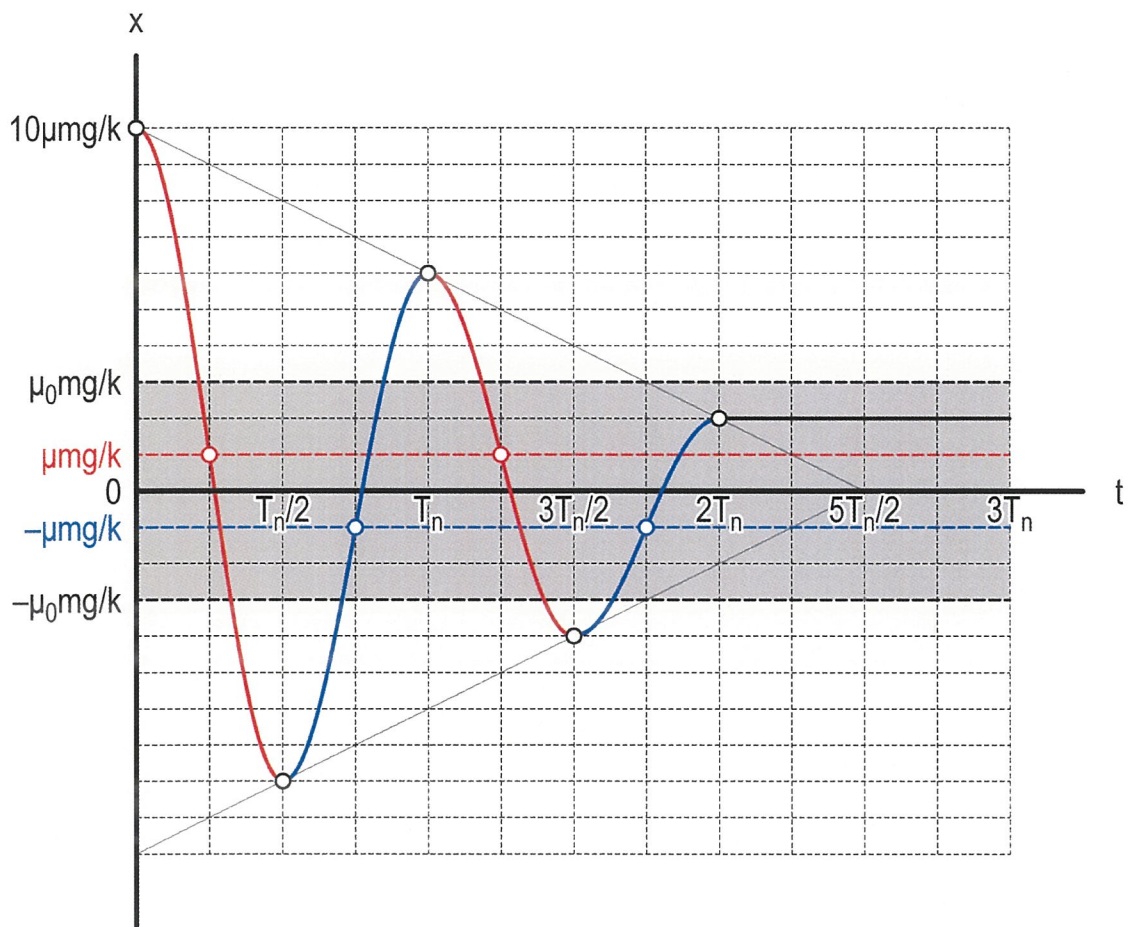
$$\text{周期： } T_n = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ … 摩擦が作用しても周期は不変}$$

- (7) 問(4)と問(6)の単振動が交互に半周期ずつ現れる振動が発生し、運動の向きが切り替わる瞬間（振動の上死点または下死点）に物体の速度が 0 になる。その瞬間に働く復元力 $|kx|$ が最大静摩擦係数 $\mu_0 mg$ を上回る限り、物体の運動が継続する。つまり、上死点または下死点が $-\frac{\mu_0 mg}{k} \leq x \leq \frac{\mu_0 mg}{k}$ に

位置した瞬間に、物体の運動が終了する。（グラフの例は次頁。）

- (8) この運動では、物体が（上死点から次の上死点まで）1 周期振動するたびに、振幅が $\Delta x = \frac{4\mu mg}{k}$ だけ減少する。この振幅の減少量 Δx を測定すれば、 m と k を既知として、 $\mu = \frac{k\Delta x}{4mg}$ の関係から動

摩擦係数の値を定めることができる。なお、周期は摩擦の有無によらないので、周期を計測しても動摩擦係数の値を定めることはできない。



問(7)のグラフの例

(静摩擦係数 $\mu_0 = 3\mu$ 、初期変位 $x_0 = \frac{10\mu mg}{k}$ の場合)